Uitwerkingen CCVW Wiskunde B 25-7-2023

Vraag 1a - 8 punten

$f'(x) = \frac{(2x+4)(x+4)-(x^2+4x+4)}{(x+4)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 12x + 16 - x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+6) = 0$

$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -6$. De punten *A* en *B* zijn dus $(-2, 0)$ en $(-6, -8)$

Vervolg met tangens:

De richtingscoëfficiënt van lijn ℓ is $\frac{0-(-8)}{-2-(-6)} = \frac{8}{4} = 2$

De richtingscoëfficiënt van lijn *m* is $f'(0) = \frac{4 \cdot 4-4}{4^2} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

$\tan^{-1}(2) \approx 63{,}43°$; $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 36{,}87°$

De hoek tussen l en *m* is dus $63{,}43° - 36{,}87° \approx 26{,}6°$

Vervolg met cosinusformule:

Een richtingsvector voor lijn ℓ is $\begin{pmatrix} -2-(-6) \\ 0-(-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

De richtingscoëfficiënt van lijn *m* is $f'(0) = \frac{4 \cdot 4-4}{4^2} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$, dus een richtingsvector voor lijn *m* is $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Dit geeft $\cos(\angle(\ell, m)) = \frac{\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right)}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{16+24}{\sqrt{16+64} \cdot \sqrt{9+16}} = \frac{40}{5\sqrt{80}} = \frac{8}{\sqrt{80}}$

Dus $\angle(\ell, m) = \cos^{-1}\left(\frac{8}{\sqrt{80}}\right) \approx 26{,}6°$

Vraag 1b - 6 punten

$g(x) = p \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + x - 2} = p \Leftrightarrow 1 = p(x^2 + x - 2) \Leftrightarrow px^2 + px - 2p - 1 = 0$

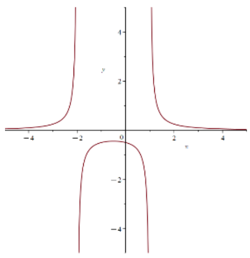
$D = p^2 - 4 \cdot p \cdot (2p - 1) = p^2 + 8p^2 + 4 = 9p^2 + 4p = p(9p + 4)$

$D > 0 \Leftrightarrow p(9p + 4) > 0 \Leftrightarrow p > 0 \wedge 9p + 4 > 0 \Leftrightarrow p > 0$

of $p < 0 \wedge 9p + 4 < 0 \Leftrightarrow p < 0 \wedge p < -\frac{4}{9} \Leftrightarrow p < -\frac{4}{9}$

Alternatief

$g'(x) = \frac{-(2x+1)}{(x^2 + x - 2)^2}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$



$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$

Dit zijn de verticale asymptoten van de grafiek.

De schets van de grafiek hiernaast leert dan:

Zowel voor $x < -2$ als voor $x > 1$ neemt $g(x)$ alle positieve *y*-waarden aan.

Voor $-2 < x < 1$ is de maximumwaarde $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{9}$

Er zijn dus twee snijpunten met $y = p$ voor $p > 0$ en voor $p < -\frac{4}{9}$

Vraag 1c - 6 punten

Er is een verticale asymptoot als $n(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$ en $t(x) = (x^2 - 4)(x + 1) \neq 0$

$n(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$

$t(1)\ (= -6) \neq 0$; $t(2) = 0$, dus (enige!) verticale asymptoot $x = 1$

Voor $x \neq 2$ geldt:

$$h(x) = \frac{(x-2)(x+2)(x+1)}{(x-2)(x-1)} = \frac{(x+2)(x+1)}{x-1} = \frac{x^2+3x+2}{x-1} = \frac{x(x-1)+x+3x+2}{x-1}$$

$$= x + \frac{4x+2}{x-1} = x + \frac{4(x-1)+4+2}{x-1} = x + 4 + \frac{6}{x-1}$$

De scheve asymptoot is dus $y = x + 4$

Berekening scheve asymptoot kan ook met $\lim_{x\to\pm\infty} h'(x) = 1$ *en* $\lim_{x\to\pm\infty} h(x) - x = 4$.

Vraag 2a - 7 punten

$f'(x) = -2x \cdot \mathrm{e}^{1-x^2}$. Dit geeft $f'(-1) = 2$ en $f'(1) = -2$
De lijn door A en M (het middelpunt van de cirkel) staat loodrecht op de raaklijn aan de grafiek van f in A en heeft dus richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$. De vergelijking van deze lijn is $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

De lijn door B en M staat loodrecht op de raaklijn in B en heeft dus richtingscoëfficiënt $\frac{1}{2}$.
De vergelijking van deze lijn is dus $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Deze lijnen snijden elkaar in $M\left(0, \frac{1}{2}\right)$

De straal van de cirkel is $d(A, M) = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}}\ \left(= d(B, M)\right)$

Een vergelijking van de cirkel is zodoende $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

Vraag 2b - 8 punten

$g(\mathrm{e}) = 4 - 2 \cdot 1 = 2$; $y = 4 - 2\ln(x) \Leftrightarrow y = 4 - \ln(x^2) \Leftrightarrow \ln(x^2) = 4 - y \Leftrightarrow x^2 = \mathrm{e}^{4-y}$

$\pi \cdot \int_0^2 x^2\, \mathrm{d}y = \pi \cdot \int_0^2 \mathrm{e}^{4-y}\, \mathrm{d}y = \pi \cdot [-\mathrm{e}^{4-y}]_0^2 = \pi \cdot (-\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^4)$

De cilinder met straal e en hoogte 2 heeft inhoud $2 \cdot \pi \cdot \mathrm{e}^2$

Kan ook met $\pi \cdot \int_0^2 \mathrm{e}^2\, \mathrm{d}y = \pi \cdot [y \cdot \mathrm{e}^2]_0^2 = \pi \cdot 2 \cdot \mathrm{e}^2$

De inhoud van het omwentelingslichaam is dus $\pi \cdot (-\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^4) - 2 \cdot \pi \cdot \mathrm{e}^2 = \pi \cdot (\mathrm{e}^4 - 3\mathrm{e}^2)$

Vraag 2c - 5 punten

$h(x) = k(x) \Leftrightarrow 2\ln(x) = \ln(x - 2) + \ln(2x + 3) \Rightarrow \ln(x^2) = \ln\big((x - 2)(2x + 3)\big) \Rightarrow$

$x^2 = (x - 2)(2x + 3) \Leftrightarrow x^2 = 2x^2 - x - 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$

$h(-2)$ en $k(-2)$ bestaan niet, dus alleen $x = 3$ voldoet.

Vraag 2d - 5 punten

$l_p'(x) = \dfrac{2x}{x^2+p+2}$; $l_p''(x) = \dfrac{2(x^2+p+2)-4x^2}{(x^2+p+2)^2} = \dfrac{-2x^2+2p+4}{(x^2+p+2)^2}$

$l_p''(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 2p + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = p + 2$

Deze vergelijking heeft oplossingen als $p \geq -2$, maar voor $p = -2$ is de oplossing $x = 0$ en $l_{-2}(0) = \ln(0)$ bestaat niet. Voor $p > -2$ krijg je twee oplossingen die wel voldoen.

Vraag 3a - 6 punten

$f(x)=0 \Leftrightarrow \sin(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}x+k\cdot 2\pi \vee x=\pi-\frac{1}{2}x\ +k\cdot 2\pi \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}x=0\ +k\cdot 2\pi \vee \frac{3}{2}x=\pi+k\cdot 2\pi \Leftrightarrow x=0+k\cdot 4\pi \vee x=\frac{2}{3}\pi+k\cdot\frac{4}{3}\pi$

$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sin(x)-\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\ \mathrm{d}x=\left[-\cos(x)+2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}=\frac{1}{2}+1-(-1+2)=\frac{1}{2}$

Vraag 3b - 6 punten

$g(x)=0 \Leftrightarrow \sin(x)+\cos(2x)=0 \Leftrightarrow \sin(x)+1-2\sin^2(x)=0$

Substitutie van $y=\sin(x)$ geeft $y+1-2y^2=0 \Leftrightarrow 2y^2-y-1=0$

Oplossingen: $y=\frac{1+\sqrt{1+4\cdot 2}}{4}=\frac{1+3}{4}=1$ en $y=\frac{1-\sqrt{1+4\cdot 2}}{4}=\frac{1-3}{4}=-\frac{1}{2}$

$y=1$ geeft $\sin(x)=1$ met als enige oplossing op het gegeven interval $x=\frac{1}{2}\pi$

$y=-\frac{1}{2}$ geeft $\sin(x)=-\frac{1}{2}$ met als oplossingen op het gegeven interval $x=\frac{7}{6}\pi$ en $x=\frac{11}{6}\pi$

Alternatief:

$g(x)=0 \Leftrightarrow \cos(2x)=-\sin(x) \Leftrightarrow \cos(2x)=\sin(-x) \Leftrightarrow \cos(2x)=\cos\left(-x-\frac{1}{2}\pi\right)$

Dit geeft $2x=-\frac{1}{2}\pi-x+k\cdot 2\pi \vee 2x=-\left(-\frac{1}{2}\pi-x\right)+k\cdot 2\pi$

$2x=-\frac{1}{2}\pi-x+k\cdot 2\pi \Leftrightarrow 3x=-\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi \Leftrightarrow x=-\frac{1}{6}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi$

$2x=-\left(-\frac{1}{2}\pi-x\right)+k\cdot 2\pi \Leftrightarrow 2x=\frac{1}{2}\pi+x+k\cdot 2\pi \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$

Oplossingen op het interval $0\le x\le 2\pi$: $x=\frac{1}{2}\pi$; $x=\frac{7}{6}\pi$; $x=\frac{11}{6}\pi$

Eén van de vele varianten voor de alternatieve uitwerking:

$g(x)=0 \Leftrightarrow \sin(x)=-\cos(2x) \Leftrightarrow \sin(x)=\cos(\pi+2x) \Leftrightarrow \sin(x)=\sin\left(1\frac{1}{2}\pi+2x\right) \Leftrightarrow$

$x=1\frac{1}{2}\pi+2x+k\cdot 2\pi \vee x=\pi-\left(1\frac{1}{2}\pi-2x\right)+k\cdot 2\pi \Leftrightarrow x=-1\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi \vee x=-\frac{1}{6}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi$

Oplossingen op het interval $0\le x\le 2\pi$: $x=\frac{1}{2}\pi$; $x=\frac{7}{6}\pi$; $x=\frac{11}{6}\pi$

Vraag 3c - 7 punten

$h'(x)=\cos(x)\cdot\cos(2x)+\sin(x)\cdot -2\cdot\sin(2x)=\cos(x)\cdot\cos(2x)-2\sin(x)\cdot\sin(2x)$

$\quad =\cos(x)\cdot(1-2\sin^2(x))-2\sin(x)\cdot 2\sin(x)\cos(x)=\cos(x)(1-6\sin^2(x))$

Alternatief: $h(x)=\sin(x)\cdot(1-2\sin^2(x))=\sin(x)-2\cdot\sin^3(x)$

geeft $h'(x)=\cos(x)-2\cdot 3\sin^2(x)\cdot\cos(x)=\cos(x)\cdot(1-6\sin^2(x))$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow \cos(x)=0 \vee \sin^2(x)=\frac{1}{6}$

$\cos(x)=0$ geeft $x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$ met $h(x)=-1$ en $x=\frac{3}{2}\pi+k\cdot 2\pi$ met $h(x)=1$

$\sin^2(x)=\frac{1}{6}$ geeft $h(x)=\sin(x)\cdot(1-2\sin^2(x))=\pm\sqrt{\frac{1}{6}}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=\pm\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{6}}\ \left(=\pm\frac{1}{9}\sqrt{6}\right)$

De vier horizontale raaklijnen zijn dus $y=-1$, $y=-\frac{1}{9}\sqrt{6}$, $y=\frac{1}{9}\sqrt{6}$ en $y=1$

De wortelvormen hoeven niet vereenvoudigd te worden.

Vraag 4a - 4 punten

Een richtingsvector voor lijn ℓ is $\begin{pmatrix} 1-(-6) \\ 8-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$

Voor het snijpunt C van lijn ℓ en de positieve *x*-as geldt $(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = 10^2$

Invullen van $x_B = 1$, $y_C = 0$ en $y_B = 8$ geeft $(x_C - 1)^2 + (0-8)^2 = 100 \Leftrightarrow (x_C - 1)^2 = 36$

Dit geeft $x_C - 1 = 6 \Leftrightarrow x_C = 7$ (*de oplossing* $x_C = -5$ *ligt op de negatieve x-as*)

Een vectorvoorstelling van lijn ℓ is dus: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$

Vraag 4b - 3 punten

$d(A,P) = \sqrt{\left(-1-(-6)\right)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$
$d(B,P) = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$
Hieruit volgt dat c_1 is de cirkel met middelpunt P en straal $\sqrt{29}$ is en dat B ook op c_1 ligt.

Alternatief 1:
$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$
De lengte van deze vectoren is gelijk, dus liggen A en B op dezelfde afstand van P.
Dit betekent dat B op de cirkel ligt met middelpunt P die door A gaat.

Alternatief 2:
$d(A,P) = \sqrt{\left(-1-(-6)\right)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$
De vergelijking van c_1 is dus $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 29$
Invullen van $x_B = 1$ en $y_B = 8$ geeft $2^2 + 5^2 = 29$.
Dit klopt, dus B ligt op c_1.

Vraag 4c - 5 punten

De straal van de cirkel is $\sqrt{29}$ (*zie vraag a)*

Merk op dat $d(A,B) = \sqrt{7^2 + 7^2} = \sqrt{98} \neq 2\sqrt{29}$.
Daarom is AB geen middellijn van de cirkel en moet de rechte hoek bij A of B liggen (*stelling van Thales*).

Als de rechte hoek bij A ligt, is BD een middellijn van de cirkel.

Dit betekent dat $\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ (*zie alternatief 1 bij vraag b*)

Hieruit volgt $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, dus is D het punt $(-3. -2)$.

Als de rechte hoek bij B ligt, is AD een middellijn van de cirkel, dus volgt

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, dus is D het punt $(4,5)$.

Alternatief voor 4c:

De vergelijking van de cirkel is $(x+1)^2+(y-3)^2=29$ (*zie vraag a*)

Merk op dat $d(A,B)=\sqrt{7^2+7^2}=\sqrt{98}\neq 2\sqrt{29}$.
Daarom is AB geen middellijn van de cirkel en moet de rechte hoek bij A of B liggen (*stelling van Thales*).

Als de rechte hoek bij A ligt, dan is D een snijpunt van de lijn door A die loodrecht op AB staat en de cirkel. De richtingscoëfficiënt van AB is 1 (*zie vraag a*), de vergelijking van de lijn door A loodrecht op AB is $y=-x-5$.

Substitutie van $y=-x-5$ in de vergelijking van de cirkel geeft

$(x+1)^2+(-x-8)^2=29 \Leftrightarrow x^2+2x+1+x^2+16x+64=29$

$\Leftrightarrow 2x^2+18x+36=0 \Leftrightarrow x^2+9x+18=0 \Leftrightarrow (x+6)(x+3)=0 \Leftrightarrow x=-6 \vee x=-3$

Dit geeft $x_D=-3$ en $y_D=-2$

Als de rechte hoek bij B ligt, dan is D een snijpunt van de lijn door B die loodrecht op AB staat en de cirkel. De vergelijking van de lijn door B loodrecht op AB is $y=-x+9$.

Substitutie van $y=-x+9$ in de vergelijking van de cirkel geeft
$(x+1)^2+(-x+6)^2=29 \Leftrightarrow x^2+2x+1+x^2-12x+36=29$

$\Leftrightarrow 2x^2-10x+8=0 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4)=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=4$

Dit geeft $x_D=4$ en $y_D=5$

Vraag 4d - 5 punten

Driehoek ABM heeft als basis $d(A,B)=\sqrt{7^2+7^2}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$

De oppervlakte van deze driehoek is 14, maar is ook gelijk aan $\frac{1}{2}\times basis \times hoogte$

Voor de hoogte h geldt dus $\frac{1}{2}\cdot 7\sqrt{2}\cdot h=14 \Leftrightarrow h=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}=\sqrt{8}$

De straal van de cirkel is dan $r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}d(A,B)\right)^2+h^2}=\sqrt{24\frac{1}{2}+8}=\sqrt{32\frac{1}{2}}$

De oppervlakte van de cirkel is zodoende $\pi\cdot r^2=32\frac{1}{2}\pi$

